

球体及び楕円柱上の刃型衝立による電波の回折

藤 本 三 治*

Diffraction of the Electromagnetic Wave by a Sphere and a Knife Edge on an Elliptic Cylinder

Sanji FUJIMOTO

The present paper deals with diffraction of the electromagnetic wave by a conductive sphere and by a knife edge on an elliptic cylinder, and may practically serve on calculating the field intensity of the wave propagating on the earth surface or beyond the mountain chain on it.

Now, let us take the earth body analogous to a conducting sphere or an elliptic cylinder, and the mountain chain to a knife edge.

While this theoretical field intensity has been derived out from Maxwell's equations, its experimental result on the case of a sphere and numerical examples on the case of an elliptic cylinder are introduced.

1. 緒 言

地球上の電波伝播に関連して Van der Pol⁽¹⁾, Mc Gray⁽²⁾ 及び W. R. Haseltine⁽³⁾ 等の回折に関する基礎研究がある。

筆者は球体による電波の回折問題の一般的解法を述べ、極超短波を用いてその模擬実験を行った結果を報告するとともに、地球上の山脈を楕円柱上の刃型衝立に置きかえて回折理論を進め、その結果を例示しよう。

2. 導体球による電波の回折

2・1 理論 電界E, 磁界Hは次の Maxwell の方程式を満足する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot } H = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma E, \quad \text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \text{div } E = 0, \quad \text{div } H = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 1)$$

($\mu=1$)

この第1及び2式を組合わせ,

$$-\text{rot}(\text{rot} E) = \Delta E - \text{grad div } E$$

を用いて, 第3式を利用すると

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c^2}{\epsilon} \Delta E$$

となり, E, Hが正弦波なら

* 福井大学工学部助教授

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 2)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} k &= \alpha - j\beta, \quad k^2 = \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - j \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\epsilon\omega^2}{2c^2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right\}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\epsilon\omega^2}{2c^2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 3)$$

一方 (2.1) の第 1, 2 式より

$$\text{rot } H = k_1 E, \quad \text{rot } E = -k_2 H \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 4)$$

ここに

$$k_1 = \frac{4\pi\sigma}{c} + j \frac{\omega\epsilon}{c}, \quad k_2 = j \frac{\omega}{c} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 5-1)$$

であるが, σ , ϵ 及び λ に夫々 e.m.u., e.s.u., cm 単位を用いると

$$k_1 = 4\pi\sigma \cdot 3 \times 10^{10} + j \frac{2\pi\epsilon}{\lambda}, \quad k_2 = j \frac{2\pi}{\lambda} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 5-2)$$

(2.3), (2.5) より

$$k^2 = -k_1 k_2 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 6)$$

今 $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$ として (2.2) を極座標で表わすと

$$\left. \begin{aligned} k_1 E_r &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(r \sin\theta \cdot H_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(r H_\theta)}{\partial\varphi} \right\} \\ k_1 E_\theta &= \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ \frac{\partial H_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r \sin\theta \cdot H_\varphi)}{\partial r} \right\} \\ k_1 E_\varphi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial H_\theta r}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial\theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 7)$$

$$\left. \begin{aligned} -k_2 H_r &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{ \frac{\partial(r \sin\theta \cdot E_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial\varphi} \right\} \\ -k_2 H_\theta &= \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ \frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r \sin\theta \cdot E_\varphi)}{\partial r} \right\} \\ -k_2 H_\varphi &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 8)$$

以上の諸式より E , H の解を求めよう。このため

(i) r 方向分の電波のみが存在し, 磁波は存在しない場合で, 夫々の諸量に suffix 1 を附し, E_{r1} , $E_{\varphi1}$, $E_{\theta1}$, $H_{r1}=0$, $H_{\varphi1}$, $H_{\theta1}$

(ii) r 方向分の磁波のみが存在し, 電波は存在しない場合で, 夫々の諸量に suffix 2 を附し, $E_{r2}=0$, $E_{\varphi2}$, $E_{\theta2}$, H_{r2} , $H_{\varphi2}$, $H_{\theta2}$ で表わすと

$$\left. \begin{aligned} E_r &= E_{r1} + E_{r2} = E_{r1}, \quad E_\varphi = E_{\varphi1} + E_{\varphi2}, \quad E_\theta = E_{\theta1} + E_{\theta2} \\ H_r &= H_{r1} + H_{r2} = H_{r2}, \quad H_\varphi = H_{\varphi1} + H_{\varphi2}, \quad H_\theta = H_{\theta1} + H_{\theta2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 9)$$

になる。先ず電波のみの場合 $H_{r1}=0$ とし (2.8) 式第 1 式を利用し, かつ scalar potential を U_1 で記すと

$$E_{\varphi1} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U_1}{\partial\varphi}, \quad E_{\theta1} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial\theta} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 10)$$

さらに

$$U_1 = \partial(r\Pi_1)/\partial r \quad \dots\dots\dots (2.11-1)$$

とおき Π_1 を scalar potential とすると上式と (2.10) から

$$E_{\varphi 1} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r \partial \varphi}, \quad E_{\theta 1} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r \partial \theta} \quad \dots\dots\dots (2.12-1)$$

(2.7) の第2, 第3式と (2.12) を組合わせて

$$H_{\varphi 1} = -k_1 \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta} = -\frac{k_1}{r} \frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial \theta}, \quad H_{\theta 1} = k_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi} = \frac{k_1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r\Pi_1)}{\partial \varphi} \quad \dots\dots\dots (2.13-1)$$

これを (2.7) 第1式に代入して

$$E_{r1} = -\frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.14-1)$$

(2.12)~(2.14) を (2.8) 第2式に代入し, (2.6) と組合わせ

$$k^2 \Pi_1 + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.15-1)$$

これと (2.14) より

$$E_{r1} = -\frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r^2} + k^2 r \Pi_1 \quad \dots\dots\dots (2.16-1)$$

次に磁波のみのときには $E_{r2} = 0$ として (2.7) 第1式と scalar potential

$$U_2 = \partial(r\Pi_2)/\partial r \quad \dots\dots\dots (2.11-2)$$

を用いれば

$$H_{\varphi 2} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r\Pi_2)}{\partial r \partial \varphi}, \quad H_{\theta 2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi_2)}{\partial r \partial \theta} \quad \dots\dots\dots (2.12-2)$$

(2.8) 第2, 3式は

$$E_{\varphi 2} = k_2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi_2)}{\partial \theta}, \quad E_{\theta 2} = -k_2 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r\Pi_2)}{\partial \varphi} \quad \dots\dots\dots (2.13-2)$$

これらを (2.8) 第1式に代入すると

$$H_{r2} = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial(r\Pi_2)}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(r\Pi_2)}{\partial \varphi} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (2.14-2)$$

上式と (2.7) より

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi_2)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.15-2)$$

(2.14-2), (2.15-2) より

$$H_{r2} = k^2 r \Pi_2 + \frac{\partial^2(r\Pi_2)}{\partial r^2} \quad \dots\dots\dots (2.16-2)$$

となる。従って (2.7), (2.8) の解は (2.9) より

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r^2} + k^2 r \Pi_1, \quad E_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r \partial \theta} - k_2 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r\Pi_2)}{\partial \varphi}, \\ E_{\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r\Pi_1)}{\partial r \partial \varphi} + k_2 \frac{1}{r} \frac{\partial(r\Pi_2)}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= k^2 r \Pi_2 + \frac{\partial^2(r \Pi_2)}{\partial r^2}, \quad H_\theta = k_1 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \Pi_1)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r \Pi_2)}{\partial r \partial \theta}, \\ H_\varphi &= -k \frac{1}{r} \frac{\partial(r \Pi_1)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r \Pi_2)}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 18)$$

又 Π_1, Π_2 は (2.15-1), (2.15-2) の如く

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r \Pi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Pi = 0 \quad \dots (2.19-1)$$

又は

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad \dots\dots\dots (2.19-2)$$

の解である。

さて

$$\Pi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 20)$$

とおいて (2.19) に代入すると

$$d^2 \Phi / d\varphi^2 + n^2 \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 21)$$

$$d^2(rR) / dr^2 + \{k^2 - m(m+1)/r^2\} rR = 0 \quad \dots\dots\dots (2.22-1)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{d\Theta}{d\theta} \right\} + \left\{ m(m+1) - \frac{n^2}{1-\mu^2} \right\} \Theta = 0 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 23)$$

但し

$$\mu = \cos \theta \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 24)$$

が成立しなければならないことになる。

(2.22) で

$$kr = x, \quad R(r) = y / \sqrt{x} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 25)$$

とおくと

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left\{ 1 - \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}{x^2} \right\} y = 0 \quad \dots\dots\dots (2.22-2)$$

先ず (2.21) の解は

$$\Phi = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 26)$$

(2.23) の解は

$$\Theta = P_m^n(\mu) = P_m^n(\cos \theta) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 27)$$

で P_m^n は Legendre の n 階 m 次の陪函数を表わし, m は整数である。 $|n| > m$ に対しては $P_m^n = 0$ であることから n は

$$n = -m, -(m-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (m-1), m$$

の $(2m+1)$ 個の値をとる。

(2.22-2) の解は $y = Z_{m+\frac{1}{2}}(x)$, あるいは (2.25) より

$$R(r) = (1/\sqrt{kr}) Z_{m+\frac{1}{2}}(kr) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 28)$$

但し $Z_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ は $\left(m + \frac{1}{2}\right)$ 次の円柱函数で

$$Z_{m+\frac{1}{2}}(kr) = C'_m J_{m+\frac{1}{2}}(kr) + D'_m \cdot Y_{m+\frac{1}{2}}(kr), \quad (J: \text{Bessel 函数}, Y: \text{Neumann 函数})$$

あるいは $C'_m = 1$, $D'_m = -j$ とし

$$Z_{m+\frac{1}{2}}(kr) = H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \quad (H: \text{Hankel 函数})$$

これらと (2.28) より

$$rR(r) = C_m \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(kr) - D_m \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} Y_{m+\frac{1}{2}}(kr) \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\left(C_m = \sqrt{\frac{2}{\pi k^2}} C'_m, \quad D_m = \sqrt{\frac{2}{\pi k^2}} D'_m \right)$$

$$\text{又は} \quad rR(r) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

この中、 $H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ は複素 (kr) 平面の ∞ で 0 となり、 kr の虚数部の負平面で 0 となることから回折波を表わし、 $J_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ は原点を含み kr 平面の有限範囲で規則正しいことから球体内の電波を表わす。又 $Y_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ は $kr=0$ で異常点をもつ。

従って (2.26), (2.27), (2.29) より (2.19) の解は

$$r\Pi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^m \left\{ C_m \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(kr) - D_m \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} Y_{m+\frac{1}{2}}(kr) \right\} \left\{ P_m^n(\cos\theta) \right\}$$

$$\left\{ A_m \cos(n\varphi) + B_m \sin(n\varphi) \right\} \quad \dots\dots\dots (2.31)$$

で表わされる。一方入射波を正弦平面波とし、これが第2.1図のように z 方向に進行、電界は xz 面に振動する E_x のみが、磁界は yz 面に振動する H_y のみが存在するものとし、球体内の諸量に suffix I を、球体外の諸量に II を附すと入射波は

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E e^{j(\omega t + k^{\text{II}} z)}, \quad H_y = H e^{j(\omega t + k^{\text{II}} z)}, \quad E_y = E_z = H_x = H_z = 0 \\ \text{ただし} \quad H &= -j(k^{\text{II}}/k_z) E \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.32)$$

で表わされるが、これを球座標の分値に直して $e^{j\omega t}$ を略すと

$$\left. \begin{aligned} E_r &= E \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta}, \quad E_\theta = E \cos\theta \cdot \cos\varphi \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta}, \\ E_\varphi &= -E \sin\varphi \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.33)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= H \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta}, \quad H_\theta = H \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta}, \\ H_\varphi &= H \cos\varphi \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

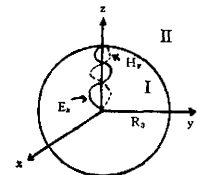
(2.17) 第1式と (2.33) 第1式とから

$$E \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta} = \partial^2 (r\Pi_1) / \partial r^2 + k^{\text{II}^2} r\Pi_1 \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

$$\text{又} \quad \sin\theta \cdot e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta} = -\frac{1}{jk^{\text{II}} r} \frac{\partial}{\partial \theta} e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta},$$

$$e^{jk^{\text{II}} r \cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} j^m (2m+1) \sqrt{\frac{\pi k^{\text{II}} r}{2}} \frac{J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\text{II}} r)}{k^{\text{II}} r} P_m(\cos\theta)$$

を用いて



第 2.1 図

$$E \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot e^{jk^{\Pi} r \cos \theta} = E \frac{1}{(k^{\Pi} r)^2} \sum_{m=1}^{\infty} j^{m-1} (2m+1) \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) P_m^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi$$

..... (2.36)

である。今

$$r \Pi_1 = E \frac{1}{k^{\Pi^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) \cdot P_m^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi$$

..... (2.37)

とおいて (2.35) に (2.36), (2.37) を代入すると

$$\partial^2 \left\{ \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) \right\} / \partial r^2 + \left\{ k^{\Pi^2} - \frac{j^{m-1}}{\alpha_m} (2m+1) \frac{1}{r^2} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) \right\} = 0$$

一方 (2.29) で $C_m=1$, $D_m=0$ とおくと

$$r R = \sqrt{\pi k^{\Pi} r / 2} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r)$$

は (2.22) の解で

$$\partial^2 \left\{ \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) \right\} / \partial r^2 + \left\{ k^{\Pi^2} - \frac{m(m+1)}{r^2} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) \right\} = 0$$

となる。これら両式を比較すると

$$\alpha_m = j^{m-1} \frac{2m+1}{m(m+1)}$$

..... (2.38)

を得る。(2.38) を (2.37) に代入して入射波に対し suffix i をつけると,

$$\begin{aligned} r \Pi_1^i &= E \frac{1}{k^{\Pi^2}} \sum_{m=1}^{\infty} j^{m-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) \cdot P_m^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi \\ \text{同様に } r \Pi_2^i &= -E \frac{j}{k^{\Pi} k_2^{\Pi}} \sum_{m=1}^{\infty} j^{m-1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\Pi} r) \cdot P_m^1(\cos \theta) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

..... (2.39)

上式は (2.31) と同形式で, (2.31) で $n=1$ とし Π_1 に対しては $B_n=B_1=0$, Π_2 に対しては $A_n=A_1=0$ としたもの一致する。次に回折波に対しては suffix d をつけて $J_{m+\frac{1}{2}}$ の表現の代りに $H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}$ をとり, 球体内の電波に対しては s をつけて $J_{m+\frac{1}{2}}$ の表現をそのまま用いると,

$$\begin{aligned} r \Pi_1^d &= E \frac{1}{k^{\Pi^2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(k^{\Pi} r) P_m^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi \\ r \Pi_2^d &= -E \frac{j}{k^{\Pi} k_2^{\Pi}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(k^{\Pi} r) P_m^1(\cos \theta) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

..... (2.40)

$$\begin{aligned} r \Pi_1^s &= E \frac{1}{k^{I^2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^I r) P_m^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi \\ r \Pi_2^s &= -E \frac{j}{k^I k_2^I} \sum_{m=1}^{\infty} d_m \sqrt{\frac{\pi k^{\Pi} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^I r) P_m^1(\cos \theta) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

..... (2.41)

となる。導体球の半径を R_0 とし, $r=R_0$ における境界条件 (E, H の接線分が球の内外で夫々等しい) を挙げると

$$E_\theta^I = E_\theta^{\text{II}}, E_\varphi^I = E_\varphi^{\text{II}}, H_\theta^I = H_\theta^{\text{II}}, H_\varphi^I = H_\varphi^{\text{II}}$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \left[k_1^{\text{II}} \{ r \Pi_1^t + r \Pi_1^a \} \right]_{r=R_0} &= \left[k_1^I \cdot r \Pi_1^s \right]_{r=R_0} \\ \left[k_2^{\text{II}} \{ r \Pi_2^t + r \Pi_2^a \} \right]_{r=R_0} &= \left[k_2^I \cdot r \Pi_2^s \right]_{r=R_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 42)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r} \{ r \Pi_1^t + r \Pi_1^a \} \right]_{r=R_0} &= \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \Pi_1^s) \right]_{r=R_0} \\ \left[\frac{\partial}{\partial r} \{ r \Pi_2^t + r \Pi_2^a \} \right]_{r=R_0} &= \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \Pi_2^s) \right]_{r=R_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 43)$$

(2.39)~(2.41) を (2.42), (2.43) に代入して係数比較を行うと

$$\left. \begin{aligned} a_m &= j^{m+1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \cdot \\ &\frac{k_1^{\text{II}} \sqrt{\frac{\pi k^{\text{II}} R_0}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\text{II}} R_0) \left[\frac{\partial B_m}{\partial r} \right]_{r=R_0} - k_1^I \sqrt{\frac{\pi k^I R_0}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^I R_0) \left[\frac{\partial A_m}{\partial r} \right]_{r=R_0}}{-k_1^I \sqrt{\frac{\pi k^I R_0}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^I R_0) \left[\frac{\partial c_m}{\partial r} \right]_{r=R_0} + k_1^{\text{II}} \sqrt{\frac{\pi k^{\text{II}} R_0}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}(k^{\text{II}} R_0) \left[\frac{\partial B_m}{\partial r} \right]_{r=R}} \\ b_m &= j^{m+1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \cdot \\ &\frac{k_2^{\text{II}} \sqrt{\frac{\pi k^{\text{II}} R_0}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\text{II}} R_0) \left[\frac{\partial B_m}{\partial r} \right]_{r=R_0} - k_2^I \sqrt{\frac{\pi k^I R_0}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^I R_0) \left[\frac{\partial A_m}{\partial r} \right]_{r=R_0}}{-k_2^I \sqrt{\frac{\pi k^I R_0}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^I R_0) \left[\frac{\partial c_m}{\partial r} \right]_{r=R_0} + k_2^{\text{II}} \sqrt{\frac{\pi k^{\text{II}} R_0}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(k^{\text{II}} R_0) \left[\frac{\partial B_m}{\partial r} \right]_{r=R_0}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 44)$$

となる。但し

$$A_m = \sqrt{\frac{\pi k^{\text{II}} r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^{\text{II}} r), B_m = \sqrt{\frac{\pi k^I r}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(k^I r), c_m = \sqrt{\frac{\pi k^{\text{II}} r}{2}} H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(k^{\text{II}} r) \dots\dots\dots (2 \cdot 45)$$

さらに

$$n_1^2 = k_1^I / k_1^{\text{II}}, n_2^2 = k_2^I / k_2^{\text{II}} = 1 \dots\dots\dots (2 \cdot 46)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} a_m &= j^{m+1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \left[\frac{A_m \partial B_m / \partial r - n_1^2 B_m \partial A_m / \partial r}{c_m \partial B_m / \partial r - n_1^2 B_m \partial c_m / \partial r} \right]_{r=R_0} \\ b_m &= j^{m+1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \left[\frac{A_m \partial B_m / \partial r - B_m \partial A_m / \partial r}{c_m \partial B_m / \partial r - B_m \partial c_m / \partial r} \right]_{r=R_0} = [a_m]_{n_1=1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 47)$$

で与えられる。

E, H を求めるため (2.40) を (2.17) に代入し suffix d を除いて書くと,

$$E_r = E \frac{1}{k^{\text{II}^2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_m P_m^1(\cos \theta) \cdot \cos \varphi \left(\frac{\partial c_m}{\partial r^2} + k^{\text{II}^2} c_m \right) \right\}$$

一方 c_m は (2.22) の解であるから

$$\frac{\partial c_m}{\partial r^2} + k_{II}^2 c_m = \frac{m(m+1)}{r^2} c_m$$

従ってこれを組合わせると次の第1式、又同様にして第2式以下の次の諸式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E_r &= E \frac{1}{k_{II}^2} \frac{\cos \varphi}{r^2} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) a_m c_m P_m^1(\cos \theta) \\ E_{\theta} &= E \frac{1}{k_{II}^2} \frac{\cos \theta}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_m}{k_{II}} \frac{\partial c_m}{\partial r} \frac{\partial P_m^1(\cos \theta)}{\partial \theta} + j b_m c_m P_m^1(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\} \\ E_{\varphi} &= -E \frac{1}{k_{II}^2} \frac{\sin \varphi}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_m}{k_{II}} \frac{\partial c_m}{\partial r} P_m^1(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} + j b_m c_m \frac{\partial P_m^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 48)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= -j E \frac{1}{k_{II} k_2^2} \frac{\sin \varphi}{r^2} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) b_m c_m P_m^1(\cos \theta) \\ H_{\theta} &= E \frac{1}{k_{II} k_2^2} \frac{\sin \varphi}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ k_{II} a_m c_m P_m^1(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} - j b_m \frac{\partial c_m}{\partial r} \frac{\partial P_m^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \right\} \\ H_{\varphi} &= E \frac{1}{k_{II} k_2^2} \frac{\cos \varphi}{r} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ k_{II} a_m c_m \frac{\partial P_m^1(\cos \theta)}{\partial \theta} - j b_m \frac{\partial c_m}{\partial r} P_m^1(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 49)$$

さらに実際の場合として

(i) 媒質 II が空気るとき

$$\epsilon_{II}=1, \sigma_{II}=0, \text{ 又導体球において } \epsilon_I=\epsilon, \sigma_I=\sigma$$

とすると (2.5) より

$$\left. \begin{aligned} k_1^{II} &= k_2^{II} = j \omega / c = j 2\pi / \lambda, \quad k^{II} = 2\pi / \lambda \\ n_1^2 &= \epsilon - j 6 \times 10^{10} \sigma \lambda \\ k_1^I &= 4\pi \sigma \cdot 3 \times 10^{10} + j \epsilon 2\pi / \lambda, \quad k_2^I = j 2\pi / \lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot 50)$$

(ii) 媒質が空気中で、しかも導体球が完全導体なら

$$\sigma \rightarrow \infty \text{ 又は } (2.50) \text{ より } n_1^2 \rightarrow -\infty, k^I = -\infty, B_m \rightarrow 0$$

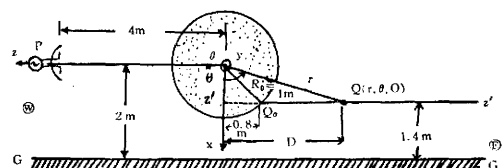
であるから、これを (2.47) に代入して

$$a_m = j^{m+1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \left[\frac{\partial A_m}{\partial r} / \frac{\partial c_m}{\partial r} \right]_{r=R_0}, \quad b_m = j^{m+1} \frac{2m+1}{m(m+1)} \left[A_m / c_m \right]_{r=R_0} \dots\dots\dots (2 \cdot 51)$$

となる。(4)

2.2 回折測定

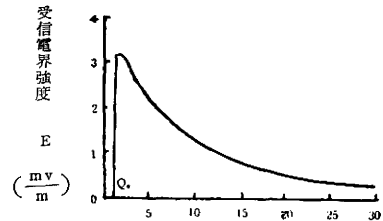
第2.2図のように半径 $R_0=1m$ の金属球の中心O及び発振器Pを何れも地上GG上2mの位置におき、OPを結ぶ方向をz軸方向（この場合東西方向）、又GG面に垂直方向及び平行方向（この場合南北方向）を夫々x軸及びy軸に定め（従



第2.2図

って地面は yz 面内), 波長 20 cm なる平面波を z 軸方向に入射せしめて, その電界強度を測定するため受波点 Q を xz 面 (GG 面に鉛直な面) 内で地上 1.4m の高さを GG 方向に平行な線 $z'z'$ 上に沿って移動させるものとする。従って OQ を r , OQ と z 軸とのなす角を θ とすれば, Q の座標は $Q(r, \theta, \varphi=0)$ となる。

さて球の中心と Q との水平距離を D とし, これを変化させた際の回折電界強度 E の模様を第 2・3 図に示している。これによると最初の D の小さい中は E が振動的に急増しその後は減少するが, $D=8m$ 附近で一度少し増し, $D=20m$ 以上では極めて緩慢に漸減する。



距離 $D(m)$
第 2・3 図

以上の測定は $2\pi R/\lambda > 1$ の場合であり, 一定の高さの送信アンテナから発射された電波が地球で回折して伝播する場合に相当する。

3. 楕円柱上の刃型衝立による電波の回折

3・1 理論 適当な連続位置で二つの vector 函数を \mathbf{P} , \mathbf{Q} の様に決めると Green の定理から

$$\int_V (\mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}) dv = \int_S (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} da \quad (3 \cdot 1)$$

但し dv は体積要素, da は面積要素を, 又 \mathbf{n} は da に対する法線 vector を表わしている。一方電磁方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

において \mathbf{E} , \mathbf{H} を夫々 $\mathbf{E}e^{-j\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-j\omega t}$ なる形で示すと

$$\nabla \times \mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{J}^* = -\sigma^*\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} + j\omega\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (3 \cdot 2-1)$$

及び

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho^*/\mu, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon \quad (3 \cdot 2-2)$$

ここに \mathbf{J}^* 及び ρ^* は夫々 magnetic current 及び magnetic charge を示し

$$\nabla \cdot \mathbf{J} - j\omega\rho = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{J}^* - j\omega\rho^* = 0 \quad (3 \cdot 2-3)$$

(3・2-1) より

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{J}^*, \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2\mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{J}^* + \nabla \times \mathbf{J} \quad (3 \cdot 3)$$

$$\text{但し} \quad k^2 = \omega^2\epsilon\mu \quad (3 \cdot 4)$$

となる。

今 $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, $\mathbf{Q} = \phi\mathbf{a}$ とおき \mathbf{a} を任意の方向の単位 vector, ϕ を

$$\phi = e^{-jk_r r}/r \quad (3 \cdot 5)$$

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (3 \cdot 6)$$

与えられる量としよう。

r をある位置 (x, y, z) から他の一点 (x_2, y_2, z_2) までの距離

$$r = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}$$

とし, (3・1) と比較すると

$$\int_V \{ (\mathbf{a} \cdot \nabla \phi) \cdot (\mathbf{k}^2 \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{J}^* + j\omega\mu \mathbf{J}) \} - \mathbf{E} \cdot \{ \mathbf{a} \mathbf{k}^2 \phi + \nabla (\mathbf{a} \cdot \nabla \phi) \} dv \\ = \int_S (\mathbf{E} \times \nabla \phi \times \mathbf{a} - \phi \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{E}) n da$$

ここで $(\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla \phi) = \rho \nabla (\mathbf{a} \cdot \phi) / \varepsilon$, $(\mathbf{E} \times \nabla \phi) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \phi$,

$$\int_V \nabla \times \mathbf{J}^* \phi dv = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{J}^* \phi da + \int_V \mathbf{J}^* \times \nabla \phi dv$$

等を上式に代入して

$$\int_V (j\omega\mu \mathbf{J} \phi - \mathbf{J}^* \times \nabla \phi - \rho \nabla \phi / \varepsilon) dv = \int_S \{ -j\omega\mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \phi \} da \\ \dots\dots\dots (3 \cdot 8)$$

今 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ とし \mathbf{r}_1 を極めて小さく $\mathbf{r}_1 \rightarrow 0$ としよう。又

$$\nabla \phi = (1/r + jk) e^{-jkr} \mathbf{r}_0 / r,$$

$$\mathbf{r}_0 = \{ \mathbf{i}_1(x_2 - x) + \mathbf{i}_2(y_2 - y) + \mathbf{i}_3(z_2 - z) \} / r$$

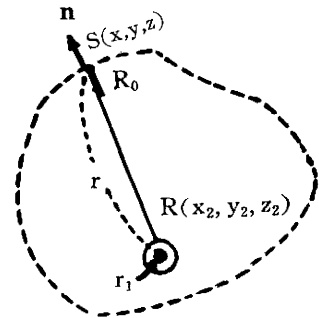
($\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ は夫々 x, y, z 方向の単位 vector)

考える面が球であるから第3・1図のように

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_0, \nabla \phi = k_1 \mathbf{r}_0 = k_1 \mathbf{n}, k_1 = (1/r_1 + jk) e^{-jkr_1} / r_1$$

\mathbf{r}_1 が小さな場合には $(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n} = \mathbf{E}$ で (3・8) の右辺は

$$\int_S \{ j\omega\mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) (k_1 \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) k_1 \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) k_1 \mathbf{n} \} da \\ = \int_S k_1 \mathbf{E} da = 4\pi r_1^2 k_1 \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{E} \cdot e^{-jkr_1} + 4\pi jkr_1 e^{-jkr_1} \mathbf{E}$$



第3・1図

ここで $\mathbf{r}_1 \rightarrow 0$ とすると (3・8) の右辺 $= 4\pi \mathbf{E}$, この \mathbf{E} を \mathbf{E}_2 で表わし, 又 (3・8) が $\mathbf{r}_1 \rightarrow 0$ と $\mathbf{r}_1 \neq 0$ のときの和として求めると,

$$\mathbf{E}_2(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{4\pi} \int_V (j\omega\mu \mathbf{J} \phi - \mathbf{J}^* \times \nabla \phi - \rho \nabla \phi / \varepsilon) dv \\ - \frac{1}{4\pi} \int_S \{ -j\omega\mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \phi + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla \phi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \nabla \phi \} da \dots\dots\dots (3 \cdot 10)$$

を得る。S の上の電流の表面密度を \mathbf{K} , 表面電荷密度を η , 同様に磁流のそれらの夫々 \mathbf{K}^* 及び η^* とすると,

$$\mathbf{K} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}, \mathbf{K}^* = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \eta = -\varepsilon \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$$

であり, 境界条件は

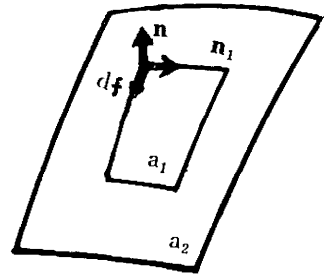
$$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2) = j\omega\eta, \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{K}_1^* - \mathbf{K}_2^*) = j\omega\eta^*$$

$$j\omega\eta = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n})$$

$$= (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{f}$$

$$j\omega\eta^* = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2) = -(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n})$$

$$= -(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot d\mathbf{f} \quad d\mathbf{f}; \text{線要素}$$



第3・2図

第3・2図のような opaque screen 上では $\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$, 従って

$$j\omega\eta = -\mathbf{H}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) = -\mathbf{H}_1 d\mathbf{f}, j\omega\eta^* = \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}) = \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{f}$$

(3・10) の第1項に第3・3図のような線要素を用いれば \int_V は \int_f に, ρ は η に, 又 dv は df

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{4\pi d_2} \oint_f jk e^{-jkr_2} \mathbf{r}_0 \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{f} - \frac{1}{4\pi d_2} \cdot$$

$$\int_a \{-j\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) + jk(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) \times \mathbf{r}_0 + jk(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{r}_0\} e^{-jkr_2} da \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 18)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{4\pi d_2} \oint_f jk e^{-jkr_2} \mathbf{r}_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{f} - \frac{1}{4\pi d_2} \cdot$$

$$\int_a \{j\omega\epsilon(\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1) + jk(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{r}_0 + jk(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{r}_0\} e^{-jkr_2} da \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 19)$$

又第3・4図から分るよう $\mathbf{n} = -\mathbf{i}_3$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}_3$, $d\mathbf{f} = \mathbf{i}_1 df$ であるから上式は

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi d_2} \frac{1}{j\omega\epsilon} \oint_f jk e^{-jkr_2} \mathbf{i}_3 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_1 df - \frac{1}{4\pi d_2} \cdot$$

$$\int_a \{-j\omega\mu(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{H}_1) + jk(-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}_1) \times \mathbf{i}_3 + jk(-\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{i}_3\} e^{-jkr_2} da \quad \dots\dots (3 \cdot 20)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{1}{4\pi d_2} \frac{1}{j\omega\mu} \oint_f jk e^{-jkr_2} \mathbf{i}_3 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{i}_1 df - \frac{1}{4\pi d_2} \cdot$$

$$\int_a \{j\omega\epsilon(-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}_1) + jk(-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{i}_3 + jk(-\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{i}_3\} e^{-jkr_2} da \quad \dots\dots (3 \cdot 21)$$

となる。

次に電波を垂直偏波と水平偏波の二つの場合に分けて(3・21)から受信電磁界強度を求めて見よう。

(1) 垂直偏波の場合 各 vector 量の関係は

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = H_1, \quad \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = 0, \quad -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{H}_1 = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 H_1 = \mathbf{i}_2 H_1,$$

$$-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}_1 = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 E_1 = -\mathbf{i}_1 E_1, \quad (-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}_1) \times \mathbf{i}_3 = -(-\mathbf{i}_1 E_1) \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2 E_1,$$

$$(-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2 H_1 \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_1 H_1, \quad -\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{E}_1 = -\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_2 E_1 = 0, \quad -\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{H}_1 = -\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_1 H_1 = 0,$$

$$(-\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{i}_3 = 0, \quad (-\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{H}_1) \mathbf{i}_3 = 0$$

で、これらを(3・20), (3・21)両式に代入, さらに(3・4), (4・15), (3・16)を用いれば

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{i}_3 E_h + \mathbf{i}_2 E_v \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 22)$$

を得る。但し E_h , E_v は夫々 \mathbf{E}_2 の水平分及び垂直分を表わし,

$$E_v = \frac{7\sqrt{w}}{4\pi d_1 d_2} j2k \int_a e^{-jk(r_1+r_2)} da = j \frac{7\sqrt{w}}{\lambda d_1 d_2} \int e^{-jkr(r_1+r_2)} da \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 23)$$

$$E_h = \frac{7\sqrt{w}}{4\pi d_1 d_2} \oint_f e^{-jkr(r_1+r_2)} df \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 24)$$

同様に

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{i}_1 H_h \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 25)$$

$$H_h = j \frac{\omega\epsilon}{2\pi} \frac{7\sqrt{w}}{d_1 d_2} \int_a e^{-jkr(r_1+r_2)} da = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_v \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 26)$$

となって \mathbf{H}_2 は水平分 H_h のみである。

(2) 水平偏波の場合 各 vector 量の関係は

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_2 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = 0, \quad \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = E_1, \quad -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{H}_1 = -\mathbf{i}_3 \times (-\mathbf{i}_2 H_1) = \mathbf{i}_1 H_1,$$

$$-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}_1 = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 E_1 = \mathbf{i}_2 E_1, \quad (-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}_1) \times \mathbf{i}_3 = (\mathbf{i}_2 E_1) \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_1 E_1,$$

$$(-\mathbf{i}_3 \times \mathbf{H}_1) \times \mathbf{i}_3 = (\mathbf{i}_1 H_1) \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_2 H_1, \quad -\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{E}_1 = -\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_1 E_1 = 0, \quad -\mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{H}_1 = -\mathbf{i}_3 \cdot (-\mathbf{i}_2 H_1) = 0,$$

但し $2a, 2b$ は楕円の長軸径, 短軸径である。

これより x_1 を d_0 及び e を含む函数 $f_1(E)$ で表わすと

$$x_1 = f_1(E) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 35-2)$$

となる。

一方

$$\left. \begin{aligned} x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 &= 1 \\ \text{あるいは } y_1 &= (b/a)\sqrt{a^2 - f_1^2(E)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 36)$$

又

$$d_0 + d_1 = E(e, \phi_3), \quad \phi_3 = \sin^{-1} x_3/a \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 37)$$

であるから x_3 を d_0, d_1, e を含む函数 $f_3(E)$ で表わすと

$$x_3 = f_3(E), \quad y_3 = (b/a)\sqrt{a^2 - f_3^2(E)} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 38)$$

同様に

$$d_0 + d_1 + d_2 = E(e, \phi_2), \quad \phi_2 = \sin^{-1} x_2/a \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 39)$$

$$x_2 = f_2(E), \quad y_2 = (b/a)\sqrt{a^2 - f_2^2(E)} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 40)$$

となる。楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の P における法線の方法係数は

$$m_1 = (a^2/b^2)(y_1/x_1) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 41)$$

法線 TP の方程式は

$$(x_1/a^2)y - (y_1/b^2)x = n^2 x_1 y_1, \quad n^2 = 1/a^2 - 1/b^2 = -e^2/b^2 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 42)$$

又 $W(x_3, y_3)$ における法線の方程式は

$$(x_3/a^2)y - (y_3/b^2)x = n^2 x_3 y_3 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 43)$$

であるから N_1 の座標 (x_4, y_4) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= \frac{n^2 b^2 x_1 x_3 (y_1 - y_3)}{x_1 y_3 - x_3 y_1} = \frac{n^2 b^2 f_1(E) f_3(E) \{ \sqrt{a^2 - f_1^2(E)} - \sqrt{a^2 - f_3^2(E)} \}}{f_1(E) \sqrt{a^2 - f_3^2(E)} - f_3(E) \sqrt{a^2 - f_1^2(E)}} \\ y_4 &= \frac{n^2 a^2 y_1 y_3 (x_1 - x_3)}{x_1 y_3 - x_3 y_1} = \frac{n^2 a b \sqrt{a^2 - f_1^2(E)} \sqrt{a^2 - f_3^2(E)} \{ f_1(E) - f_3(E) \}}{f_1(E) \sqrt{a^2 - f_3^2(E)} - f_3(E) \sqrt{a^2 - f_1^2(E)}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 44)$$

さらに

$$p_1^2 = (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2, \quad p_3^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 45)$$

TN_1 の方向係数を m_1 , SN_1 のそれを m_3 とすると

$$m_1 = \tan \alpha_1 = (a^2/b^2)(y_1/x_1), \quad m_3 = \tan \alpha_3 = (a^2/b^2)(y_3/x_3)$$

これより

$$\cos \beta_1 = \frac{(b^2/a^2)x_1 x_3 + (a^2/b^2)y_1 y_3}{\sqrt{(b^4/a^4)x_1^2 x_3^2 + (a^4/b^4)y_1^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 + x_1^2 y_3^2}} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 46)$$

同様に

$$p_4^2 = (x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 47)$$

$$x_5 = \frac{n^2 b^2 x_2 x_3 (y_2 - y_3)}{x_2 y_3 - x_3 y_2}, \quad y_5 = \frac{n^2 a^2 y_2 y_3 (x_2 - x_3)}{x_2 y_3 - x_3 y_2} \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 48)$$

$$\cos\beta_2 = \frac{(b^2/a^2)x_2x_3 + (a^2/b^2)y_2y_3}{\sqrt{(b^4/a^4)x_2^2x_3^2 + (a^4/b^4)y_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 + x_2^2y_3^2}} \quad (3 \cdot 49)$$

となる。一方 (3.33), (3.34) より

$$r_1 = \sqrt{h^2 + A_1h + B_1^2 + m^2}, \quad r_2 = \sqrt{h^2 + A_2h + B_2^2 + m^2} \quad (3 \cdot 50-1)$$

又は

$$r_1 = \frac{1}{2B_1}(h^2 + A_1h) + B_1 + \frac{m^2}{2B_1} - \dots, \quad r_2 = \frac{1}{2B_2}(h^2 + A_2h) + B_2 + \frac{m^2}{2B_2} - \dots \quad (3 \cdot 50-2)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 2\{p_3 - (h_1 + p_1)\cos\beta_1\}, \quad A_2 = 2\{p_4 - (h_2 + p_2)\cos\beta_2\} \\ B_1 &= \sqrt{(h_1 + p_1)^2 + p_3^2 - 2(h_1 + p_1)p_3\cos\beta_1}, \quad B_2 = \sqrt{(h_2 + p_2)^2 + p_4^2 - 2(h_2 + p_2)p_4\cos\beta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 51)$$

従って

$$r_1 + r_2 = Kh^2 + Mh + D + Km^2 \quad (3 \cdot 52)$$

但し

$$K = \frac{1}{2}(1/B_1 + 1/B_2), \quad M = \frac{1}{2}(A_1/B_1 + A_2/B_2), \quad D = B_1 + B_2 \quad (3 \cdot 53)$$

を得る。これらを用いると刃型衝立の上方に対する (3.28) の積分は

$$\int_a^\infty e^{-jk(r_1+r_2)} da = \int_{-\infty}^\infty e^{-jkKm^2} dm \int_h^\infty e^{-jk(Kh^2+Mh+D)} dh \quad (3 \cdot 54)$$

となるが,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-jkKm^2} dm = \frac{1}{\sqrt{kK}} \sqrt{\frac{\pi}{j}} = \sqrt{\frac{\pi}{2kK}} (1-j) \quad (3 \cdot 55)$$

$$\int_h^\infty e^{-jk(Kh^2+Mh+D)} dh = \frac{qe^{-jk(Kh^2+Mh+D)}}{j\sqrt{2kK}}.$$

$$\left\{ 1 + \sum_{n=1}^\infty j^n q^{2n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \right\} \quad (3 \cdot 56)$$

$$\text{又は} \quad \int_h^\infty e^{-jk(Kh^2+Mh+D)} dh = \frac{1}{2jkK} e^{jk(\frac{M^2}{4K}-D)}.$$

$$\left\{ \sqrt{jkK} \sqrt{\pi} - j \frac{\sqrt{2kK}}{q} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{j^n}{n!(2n+1)2^n} q^{2n} \right\} \quad (3 \cdot 57)$$

$$\text{ただし } q = \sqrt{2K/k} / (2Kh + M) \quad (3 \cdot 58)$$

なる関係があるので (3.54-1) の積分が出来、次の二通りが考えられる。

(1) $q < 1$ の場合

$$g = a_n + jb_n \quad (3 \cdot 59)$$

$$a_n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n A_{2n}, \quad b_n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n A_{2n+1} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (3 \cdot 60)$$

$$A_0 = 1, \quad A_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} q^{2n} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot q^{2n} \quad (3 \cdot 61)$$

とおけば (3.55), (3.56) を (3.54) に代入して

$$\int_a e^{-jk(r_1+r_2)} da = \frac{\sqrt{\pi}}{2kK} qg(j-1)e^{-jk(Kh^2+Mh+D)} \quad (3.62)$$

従って E_θ は (3.23) より

$$E_\theta = \frac{7\sqrt{W}}{d_1 d_2} \frac{q}{4\sqrt{\pi}k} \{(b_n + a_n) + j(b_n - a_n)\} e^{-jk(Kh^2+Mh+D)} \quad (3.63)$$

となり, 又

$$\left| \int_a e^{-jk(r_1+r_2)} da \right| \sqrt{\pi/2} \frac{q}{kK} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.64)$$

であることから E_θ の絶対値は

$$|E_\theta| = \frac{7\sqrt{W}}{d_1 d_2} \frac{q}{2\sqrt{2\pi}K} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3.65)$$

となる。

近似解として (3.59) の第2項まで及び第3項までの値を夫々 g_2, g_3 とすると

$$g_2 = 1 + jq^2, \quad g_3 = (1 - 3q^4) + jq^2 \quad (3.66)$$

であり, g_2 を用いると

$$|E_\theta| = \frac{7\sqrt{W}}{2\sqrt{2\pi}d_1 d_2 K} q \sqrt{1+q^4} \quad (\text{第2項まで}) \quad (3.67)$$

となり, g_3 を用いると

$$\int_a e^{-jk(r_1+r_2)} da = -\frac{\sqrt{\pi}}{2kK} q \{(1-q^2-3q^4) + i(1+q^2-3q^4)\} e^{-jk(Kh^2+Mh+D)} \quad (3.68)$$

$$\left| \int_a e^{-jk(r_1+r_2)} da \right| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{kK} \sqrt{1-5q^4+9q^8} \quad (\text{第3項まで})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{kK} \sqrt{1-5q^4-21q^8+225q^{12}} \quad (\text{第4項まで}) \quad (3.69)$$

$$|E_\theta| = \frac{7\sqrt{W}}{2\sqrt{2\pi}d_1 d_2 k} q \sqrt{1-5q^4+9q^8} \quad (\text{第3項まで}) \quad (3.70)$$

になる。

(2) $q > 1$ の場合

(3.57) で

$$B_n = \frac{1}{n!(2n+1) \cdot 2^n q^{2n}}, \quad B_0 = 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.71)$$

とおくと

$$\int_h^\infty e^{-jk(Kh^2+Mh+D)} dh = \frac{1}{2\sqrt{kK}} \left\{ (1-j) \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{j^n} B_n \right\} e^{jk(\frac{M^2}{4K}-D)}$$

さらに

$$c_n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n B_{2n}, \quad d_n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n B_{2n+1} \quad (3.72)$$

とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{j^n} B_n = c_n - j d_n$$

になるから

$$\left. \begin{aligned} \int_h^{\infty} e^{-jk(r_1+r_2)} da &= \frac{\sqrt{\pi}}{2kK} \left[\frac{1}{q}(d_n - c_n) + j \left\{ \frac{1}{q}(d_n + c_n) - \sqrt{\pi} \right\} \right] e^{jk(\frac{M^2}{4K} - D)} \\ \left| \int_h^{\infty} e^{jz(r_1+r_2)} da \right| &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{kK} \sqrt{\frac{1}{q^2}(c_n^2 + d_n^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{q}(c_n + d_n) + \frac{\pi}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 73)$$

が得られる。従って E_0 は

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= \frac{7\sqrt{W}}{d_1 d_2} \frac{1}{4\sqrt{\pi} K} \left[\left\{ \sqrt{\pi} - \frac{1}{q}(d_n + c_n) \right\} + j \frac{1}{q}(d_n - c_n) \right] e^{-jk(D - \frac{M^2}{4K})} \\ |E_0| &= \frac{7\sqrt{W}}{d_1 d_2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi} K} \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{q}(c_n + d_n) + \frac{1}{q^2}(c_n^2 + d_n^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot 74)$$

上式の第2項迄の近似 $|E_0|$ を求めると

$$|E_0| = \frac{7\sqrt{W}}{d_1 d_2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi} K} \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{q} + \frac{1}{q^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{6q^3} + \frac{1}{36q^6}} \dots\dots\dots (3 \cdot 75)$$

以上の単位は総て E_0 (V/m), d_1, d_2, h, h_1, h_2 等は総て (m), 又 W (Watt) である。
ここで h に比べて d が充分大きいときには $q \gg 1$ で

$$K \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \dots\dots\dots (3 \cdot 76)$$

又 β_1, β_2 が余り小さくなく $\cos \beta_1 \doteq \cos \beta_2 \doteq 1$ の範囲では

$$p_1 \doteq p_2 \doteq p_3 \doteq p_4 \dots\dots\dots (3 \cdot 77)$$

従って

$$M \doteq -(h_1/d_1 + h_2/d_2) \dots\dots\dots (3 \cdot 78)$$

$$q = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{\sqrt{d_1 d_2 (d_1 + d_2)}}{(d_1 + d_2)h - (d_2 h_1 + d_1 h_2)} \dots\dots\dots (3 \cdot 79)$$

になる。

一方見通し内の所謂自由空間における電界 $|E_0|$ は

$$|E_0| = 7\sqrt{W}/(d_1 + d_2) \dots\dots\dots (3 \cdot 80)$$

で与えられるため、一般の $q > 1$ の場合の回折係数 D は (3.74) に (3.76), (3.80) を代入して

$$D = |E_0|/|E_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi} q}(c_n + d_n) + \frac{1}{\pi q^2}(c_n^2 + d_n^2)} \dots\dots\dots (3 \cdot 81)$$

となり、特に (3.75) の適用出来る場合には

$$D \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi} q}} \dots\dots\dots (3 \cdot 82)$$

である。

又 $q < 1$ で (3.76) が成立するときの回折係数は (3.65) より

$$D = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \dots\dots\dots (3 \cdot 83)$$

となる。⁽⁵⁾

3・2 回折例

(1). 1 個の山脈を越えて地上を電波が伝播するときの回折

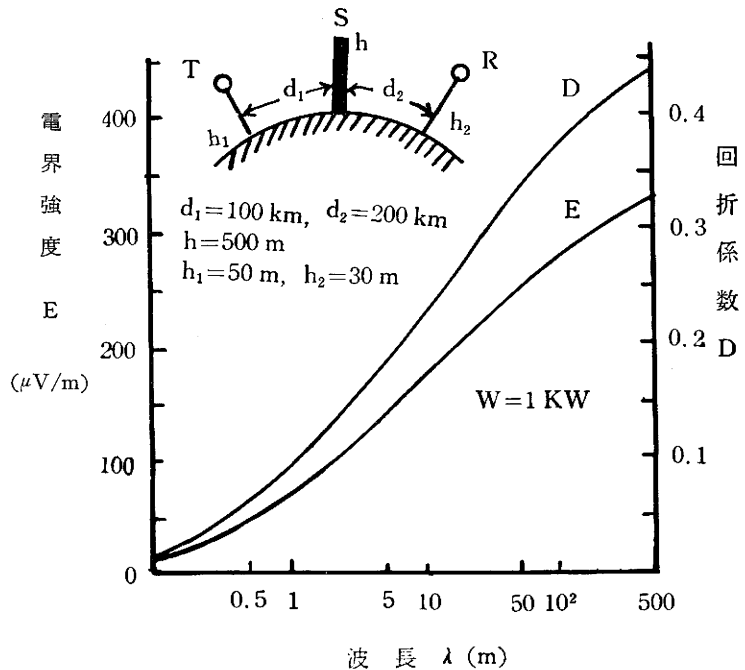
地上高50mの点Tに出力1KWの送信(発振)器が据付けられ、これより地表上100kmの距離に電波の進行方向と直角に横たわる高さ500mの山脈Sが存在するものとし、山脈よりさらに200km距った高さ30mの位置Rにおける受信電界強度E及び回折係数Dを求めよう。

このためには地球を楕円柱、山脈を楕円柱上の刃型衝立と考えればよいから(3・81)又は(3・82)で $d_1 = 10^5$, $d_2 = 2 \times 10^5$, $h = 5 \times 10^2$, $h_1 = 50$, $h_2 = 30$ (m), $W = 10^3$ (w)とおけば、波長 λ に対して電界強度E及び回折係数Dは第3・6図のようになる。

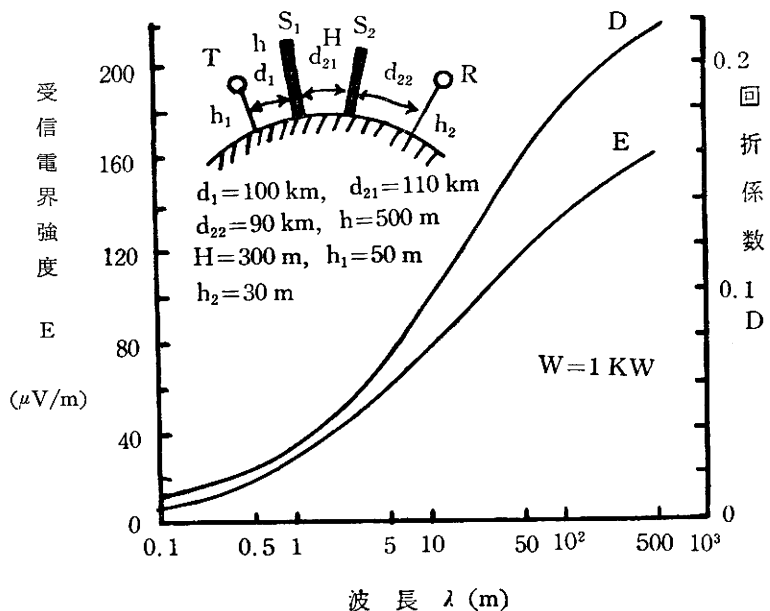
図より波長が増すと回折電界強度も次第に増し、 $\lambda = 10$ cmで回折係数の値は0.01~0.02程度となるが、 $\lambda = 10$ mになるとこの値は0.2以上と $\lambda = 10$ cmのときの10~20倍程度に増える

(2). 2 個の山脈を越えて地上を電波が伝播するときの回折

地上高50mの位置Tに出力1KWの発振器がありこれより100kmの地点に高さ500mの第1の山脈S₁



第3・6図



第3・7図

さらにこれより 110km の距離に高さ 300m の第 2 の山脈 S_2 が存在し、なおこれより 90km の距離にある高さ 30km の位置 R における回折電界強度を求めて見よう。山脈 S_1 , S_2 は簡単のため何れも電波進行方向に直角に横たわるものとし、R 点に於ける電界強度を E とする。

先ず第 2 の山がないものと仮定したときの R 点における回折電界強度を E_1 、このときの回折係数を D_1 とすれば

$$E_1 = D_1 E_0 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 84)$$

但し E_0 は R における T からの直接波の電界強度とする。

次に第 1 の山頂に適当な発振器をおいたとし、これからの直接波の電界強度が R 点で丁度 E_1 であるようにした場合、第 2 の山による回折波の R 点における電界強度が E 、回折係数が D_2 とすれば

$$E = D_2 E_1 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 85)$$

となる。

従って受信電界強度はこの両式より

$$E = D E_0, \quad D = D_1 D_2 \quad \dots\dots\dots (3 \cdot 86)$$

として求められ、以上のことを換言すれば、受信電界 E は第 2 の山がないと仮定したときの R における電界強度 ($E_1 = D_1 E_0$) と、発射点を第 1 の山頂において R で受波した場合の回折係数 (D_2) との積で与えられる。

例 (1) の場合と同様に考え

$d_1 = 10^5$, $d_2 = 1.1 \times 10^5$, $d_{22} = 9 \times 10^4$, $h = 5 \times 10^2$, $H = 3 \times 10^2$, $h_1 = 50$, $h_2 = 30(m)$, $W = 10^3(w)$ として (3・81) 又は (3・82) を適用し D_1 , D_2 に相当する 2 回の計算を行うと第 3・7 図のような結果を得る。第 3・6 図と同様波長に対する電界強度 E と回折係数 D を表わしているが、山脈 1 個の場合に比べて D の値は相当小さくなっていることが分る。

4. 結 言

以上で地球上における電波伝播の回折問題二題を述べた。特に地球を楕円柱と見、山脈のような地表上の存在を刃型衝立と見た計算結果は従来の結果に比べて遙かに簡単で、実用上興味があると思われる。

参 考 文 献

- | | | | | |
|-----|-----------------|--------------|-------------|-----|
| (1) | Van der Pol | ; Phil. Mag. | 24 , | 141 |
| (2) | Mc Gray | ; Phil. Mag. | 27 , | 421 |
| (3) | W. R. Haseltine | ; Phys. Rev. | 57 , | 8 |
| (4) | 杉 浦 | ; 電磁光学 | | 275 |
| (5) | 藤 本 | ; 応物理学誌 | 23 , | 81 |

(受理年月日 昭和35年9月7日)